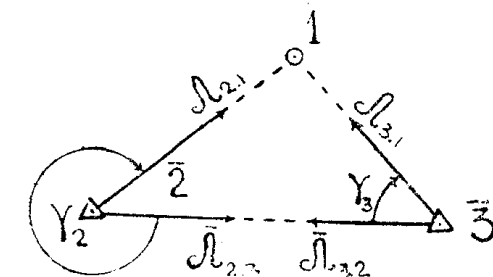


СМЕШАННЫЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ПЛОСКОЙ ЗАСЕЧКИ

Б. Ф. КРУТОЙ

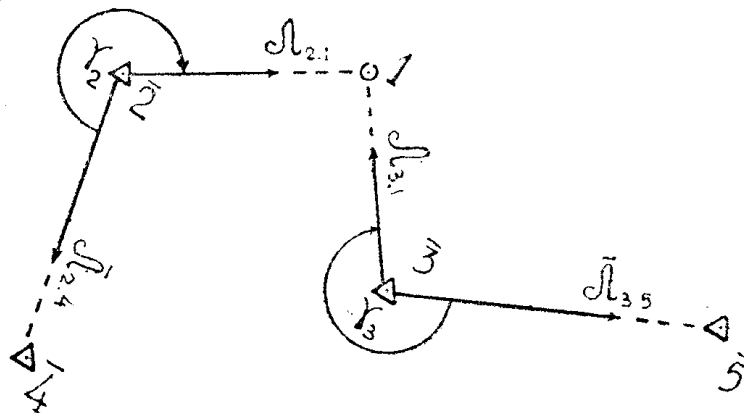
§ 1. Постановка задачи и возможные способы ее решения

Прямой плоской засечкой в геодезии называется задача по отысканию наблюдаемого положения 1 определяемой точки на плоскости посредством двух наблюдаемых примычных лучей $L_{2,1}$ и $L_{3,1}$, пересекающихся в точке 1 и проведенных на эту точку с двух твердых примычных точек $\bar{2}$, $\bar{3}$ ¹⁾ плоскости (фиг. 1.1 и 1.2). Построение лучей $L_{2,1}$, $L_{3,1}$ производится с помощью наблюдаемых углов γ_2 , γ_3 . Эти углы в общем случае (фиг. 1.1) откладываются на примычных точках 2, 3 по ходу часов от двух твердых направляющих лучей $\bar{L}_{2,2}$ и $\bar{L}_{3,2}$, проведенных с твердых примычных точек 2, 3 на соседние твердые направляющие точки \bar{H} Э 4, 5. В частном случае (фиг. 1.2) каждая из примычных точек \bar{P} может являться одновременно направляющей \bar{H} для соседней с ней примычной точки. По основаниям, выясняющимся из последующего изложения, плоскость, на которой расположены точки 1, 2, 3, 4, 5, будет называться в дальнейшем основной плоскостью.



Фиг. 1.1

Решение прямой плоской засечки, т. е. нахождение наблюдаемого положения определяемой точки 1 и примычных отрезков $\bar{P}\bar{I}$ на основной



Фиг. 1.2

1) Знак Э показывает, что множество \bar{P} примычных точек распадается на отдельные точки $\bar{2}$, $\bar{3}$.

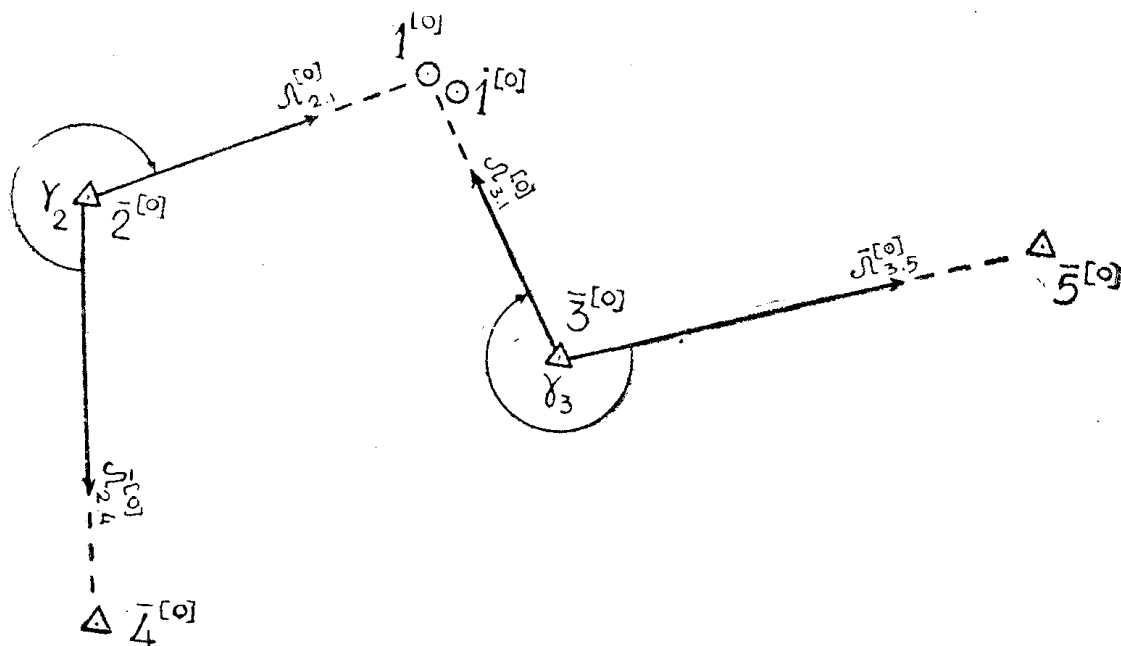
плоскости, может быть выполнено двумя путями: 1) построительным способом—быстро, но приближенно, 2) вычислительным способом—более сложно, но зато точно. Однако вычислительное решение прямой засечки довольно громоздко, особенно, если длина стороны $\overline{2,3}$ нам не дана, а известны только координаты точек $\overline{2}, \overline{3}$. Поэтому нами разработан третий возможный способ решения прямой засечки—смешанный, который является сочетанием первых двух способов и дает результаты с заданной степенью точности, требуя при этом меньшей затраты труда, чем второй из указанных способов. Решение смешанным способом ведется путем последовательных приближений.

§ 2. Смешанный способ решения прямой плоской засечки

Первое приближение

Пользуясь заданными координатами $\overline{x_T}, \overline{y_T}$ твердых точек $\overline{T} \supset \overline{П}, \overline{Н}^1)$ ($m \supset n, n$; $n \in 2, 3$; $n \in 4, 5$) основной плоскости и наблюдаемыми примычными углами γ_n , составим на миллиметровке точный рабочий чертеж засечки с относительным уменьшением 1: $U^{[0]}$ (фиг. 2.1). Уменьшение $U^{[0]}$ выберем с таким расчетом, чтобы длины сторон засечки получались в пределах 50—150 мм.

Обозначим через $\dot{m}^{[0]}, \dot{1}^{[0]}$ точные положения на рабочем чертеже изображений твердых \overline{T} и определяемой 1 точек основной плоскости, причем $\dot{m}^{[0]} \supset \dot{n}^{[0]}, \dot{n}^{[0]}$. Через $\dot{m}^{[0]}, \dot{1}^{[0]}$ обозначим полученные на рабочем чертеже путем построения приближенные положения точек $\dot{m}^{[0]}, \dot{1}^{[0]}$, которые на-



Фиг. 2.1

зовем построенными и изображениями этих точек. Пусть далее на основной плоскости точкам $\dot{m}^{[0]}, \dot{1}^{[0]}$ рабочего чертежа соответствуют точки $\overline{T}^{(0)}, \overline{1}^{(0)}$ —построенные в первом приближении положения определяемой 1

1) Знак \supset обозначает, что общее множество \overline{T} твердых точек прямой засечки распадается на 2 частных множества $\overline{П}, \overline{Н}$ примычных и направляющих твердых точек.

и твердых \bar{T} точек засечки. Тогда ошибке $\nabla 1^{[0]}$ в положении точки $1^{[0]}$ на рабочем чертеже будет соответствовать ошибка $\nabla 1^{(0)}$ в положении точки $1^{(0)}$ на основной плоскости, причем: $\nabla 1^{[0]}$ — длина отрезка $\bar{1}^{[0]} 1^{[0]}$, а $\nabla 1^{(0)}$ — длина отрезка $11^{(0)}$. Очевидно,

$$\nabla 1^{(0)} = Y^{[0]} \cdot \nabla 1^{[0]} \quad (2.1)$$

При тщательном исполнении рабочего чертежа ошибка $\nabla 1^{[0]}$ обычно не превышает 1 мм.

Измерим теперь по рабочему чертежу длины $\partial_{n.1}^{[0]}$ построенных в первом приближении примычных сторон $\bar{n}^{[0]} 1^{[0]}$. Точные значения длин отрезков $\bar{n}^{[0]} 1^{[0]}$ обозначим через $\partial_{n.1}^{[0]}$. Тогда между точными $\partial_{n.1}^{[0]}$ и приближенными $\partial_{n.1}^{[0]}$ длинами примычных сторон на рабочем чертеже будет иметь место соотношение:

$$\partial_{n.1}^{[0]} - \partial_{n.1}^{[0]} = \Delta \partial_{n.1}^{[0]} \quad (n \in 2, 3), \quad (2.2)$$

где $\Delta \partial_{n.1}^{[0]}$ — поправка длины $\partial_{n.1}^{[0]}$, обычно не превышающая 2 мм.

На основной плоскости равенству (2.2) соответствует равенство:

$$\dot{D}_{n.1} - D_{n.1}^{[0]} = \Delta D_{n.1}^{[0]} \quad (n \in 2, 3), \quad (2.3)$$

которое получается из (2.2) умножением обеих его частей на $Y^{[0]}$; отсюда более развернуто получаем:

$$\begin{aligned} \dot{D}_{2.1} - D_{2.1}^{[0]} &= \Delta D_{2.1}^{[0]} \\ \dot{D}_{3.1} - D_{3.1}^{[0]} &= \Delta D_{3.1}^{[0]} \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Следовательно, в (2.3):

$$\begin{aligned} \dot{D}_{n.1} &= Y^{[0]} \cdot \partial_{n.1}^{[0]} = D_{n.1} \\ D_{n.1}^{[0]} &= Y^{[0]} \cdot \partial_{n.1}^{[0]} \\ \Delta D_{n.1}^{[0]} &= Y^{[0]} \cdot \Delta \partial_{n.1}^{[0]} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Очевидно, что $\dot{D}_{n.1} = D_{n.1}$ есть длина отрезка $\bar{P} 1$, $D_{n.1}^{[0]}$ — длина отрезка $\bar{P}^{(0)} 1^{(0)}$, а $\Delta D_{n.1}^{[0]}$ — поправка длины $D_{n.1}^{[0]}$, равная длине отрезка $1.1^{(0)}$.

Для нахождения поправок $\Delta D_{n.1}^{[0]}$ вычислим прежде всего направляющие (дирекционные) углы $t_{n.1}$ примычных лучей $L_{n.1}$.

Для принятого на фиг. 1.1 и 1.2 способа положительного отсчета углов γ_n (по ходу часовой стрелки) мы будем иметь:

а) в прямой засечке общего вида (фиг. 1.1):

$$\begin{aligned} t_{2.1} &= \bar{t}_{2.4} + \gamma_2 \\ t_{1.3} &= \bar{t}_{5.3} + \gamma_3 \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

б) в прямой засечке частного вида (фиг. 1.1)

$$\begin{aligned} t_{2.1} &= \bar{t}_{2.3} + \gamma_3 \\ t_{1.3} &= \bar{t}_{2.3} + \gamma_3 \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Умножим далее первое из уравнений (2.3.1) на $\cos t_{1.3}$, а второе — на $\cos t_{2.1}$ и полученные равенства сложим. После этого умножим первое из уравнений (2.3.1) на $\sin t_{2.1}$, а второе — на $\sin t_{1.3}$ и полученные равенства снова сложим. В результате этого мы придем к следующим двум равенствам:

$$\begin{aligned} D_{2.1} \cos t_{2.1} + D_{3.1} \cos t_{1.3} - D_{2.1}^{(0)} \cos t_{2.1} - D_{3.1}^{(0)} \cos t_{1.3} &= \\ &= \Delta D_{2.1}^{(0)} \cos t_{2.1} + \Delta D_{3.1}^{(0)} \cos t_{1.3} \\ D_{2.1} \sin t_{2.1} + D_{3.1} \sin t_{1.3} - D_{2.1}^{(0)} \sin t_{2.1} - D_{3.1}^{(0)} \sin t_{1.3} &= \\ &= \Delta D_{2.1}^{(0)} \sin t_{2.1} + \Delta D_{3.1}^{(0)} \sin t_{1.3} \end{aligned} \quad (C)$$

Но

$$\begin{aligned} D_{2.1} \cos t_{2.1} + D_{3.1} \cos t_{1.3} &= \bar{x}_3 - \bar{x}_2 = \bar{\xi}_{2.3} \\ D_{2.1} \sin t_{2.1} + D_{3.1} \sin t_{1.3} &= \bar{y}_3 - \bar{y}_2 = \bar{\eta}_{2.3}, \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

где $\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{x}_3, \bar{y}_3$ — заданные координаты твердых примычных точек 2, 3. Кроме того, введем обозначения:

$$\begin{aligned} D_{2.1}^{(0)} \cos t_{2.1} + D_{3.1}^{(0)} \cos t_{1.3} &= \xi_{2.1}^{(0)} + \xi_{1.3}^{(0)} = \xi_{2.3}^{(0)} \\ D_{2.1}^{(0)} \sin t_{2.1} + D_{3.1}^{(0)} \sin t_{1.3} &= \eta_{2.1}^{(0)} + \eta_{1.3}^{(0)} = \eta_{2.3}^{(0)}, \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

а также обозначения:

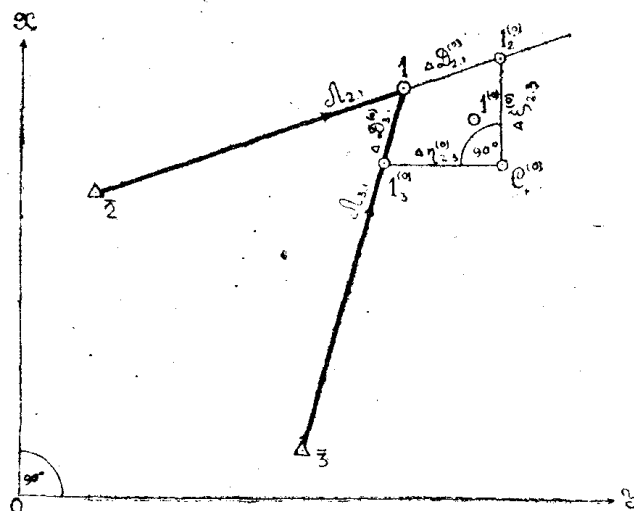
$$\begin{aligned} \Delta D_{2.1}^{(0)} \cos t_{2.1} + \Delta D_{3.1}^{(0)} \cos t_{1.3} &= \Delta \xi_{2.1}^{(0)} + \Delta \xi_{1.3}^{(0)} = \Delta \xi_{2.3}^{(0)} \\ \Delta D_{2.1}^{(0)} \sin t_{2.1} + \Delta D_{3.1}^{(0)} \sin t_{1.3} &= \Delta \eta_{2.1}^{(0)} + \Delta \eta_{1.3}^{(0)} = \Delta \eta_{2.3}^{(0)} \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

Тогда исходные равенства (C) в принятых обозначениях более сокращенно могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} (\bar{x}_3 - \bar{x}_2) - \xi_{2.3}^{(0)} &= \Delta \xi_{2.3}^{(0)} \\ (\bar{y}_3 - \bar{y}_2) - \eta_{2.3}^{(0)} &= \Delta \eta_{2.3}^{(0)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Исследуем геометрический смысл равенств (2.7). С этой целью на основной плоскости на лучах $J_{2.1}, J_{3.1}$ от примычных точек 2, 3 в направлении на определяемую точку 1 отложим отрезки $\bar{2}.1_2^{(0)}, \bar{3}.1_3^{(0)}$, длины которых равны соответственно $D_{2.1}^{(0)}, D_{3.1}^{(0)}$ (фиг. 2.2). Тогда фиг. 2.2 и формулы (2.6.3) показывают, что параллельные осям координат отрезки $1_2^{(0)} C_1^{(0)}$ и $C_1^{(0)} 1_3^{(0)}$ представляют собой суммы $\Delta \xi_{2.3}^{(0)}, \Delta \eta_{2.3}^{(0)}$ проекций поправок

$\Delta D_{2.1}^{(0)}$, $\Delta D_{3.1}^{(0)}$, на те же оси. При этом важно заметить, что вычисление сумм $\Delta \xi_{2.3}^{(0)}$, $\Delta \eta_{2.3}^{(0)}$ по формулам (2.7) не требует предварительного знания искоемых поправок $\Delta D_{2.1}^{(0)}$, $\Delta D_{3.1}^{(0)}$ примычных сторон. Отсюда следует, что после нахождения величин $\Delta \xi_{2.3}^{(0)}$, $\Delta \eta_{2.3}^{(0)}$ по формуле (2.7) мы можем воспользоваться этими величинами для обратного нахождения поправок



Фиг. 2.2

$\Delta D_{2.1}^{(0)}$, $\Delta D_{3.1}^{(0)}$, применив для этой цели простое построение, понятное из рассмотрения фиг. 2.2. Так как длины поправок $\Delta D_{2.1}^{(0)}$, $\Delta D_{3.1}^{(0)}$ согласно (2.4) могут достигать значительной величины в $2 Y^{[0]}$ мм (если принять $|\Delta \delta_{п.1}^{[0]}|_{\text{наиб}} = 2 \text{ мм}$), то указанное вспомогательное построение может быть выполнено только при условии соответствующего уменьшения этих поправок до размеров, не превышающих, например, 100 мм. Легко видеть, что это будет иметь место, если уменьшение $Y^{[1]}$ вспомогательного построения будет выбрано таким, чтобы длины $|\Delta \xi_{2.3}^{(0)} : Y^{[1]}|$, $|\Delta \eta_{2.3}^{(0)} : Y^{[1]}|$ получились в пределах 60—80 мм.

Для определения возможного значения $Y^{[1]}$ при заданном значении $Y^{(0)}$ подсчитаем увеличение $K^{[1]}$ вспомогательного построения, которое определим двойным равенством:

$$K^{[1]} = \frac{Y^{[0]}}{Y^{[1]}} = \frac{|\delta \delta_{п.1}^{[1]}|_{\text{наиб}}}{|\nabla \delta_{п.1}^{[0]}|_{\text{наиб}}}, \quad (2.8)$$

где

$|\nabla \delta_{п.1}^{[0]}|_{\text{наиб}}$ — наибольшее безусловное значение ошибки в длинах $\delta_{п.1}^{[0]}$ примычных сторон, измеренных по рабочему чертежу;

$|\delta \delta_{п.1}^{[1]}|_{\text{наиб}}$ — соответствующее безусловное значение увеличенной в $K^{[1]}$ раз поправки $(\Delta \delta_{п.1}^{[0]})_{\text{наиб}} = -(\nabla \delta_{п.1}^{[0]})_{\text{наиб}}$.

Полагая $(\nabla \partial_{п.1}^{[0]})_{наиб} = \pm 2 \text{ мм}$, $(\partial \partial_{п.1}^{[0]})_{наиб} = \pm 100 \text{ мм}$, из (2.8) получим:

$$K^{[1]} = \frac{y^{[0]}}{y^{[1]}} = \frac{100}{2} = 50. \quad (2.8.1)$$

В ряде случаев $K^{[1]}$ может быть доведено до 100.

Вспомогательное построение, выполняемое с уменьшением $y^{[1]}$ и служащее для отыскания поправок $\Delta D_{п.1}^{(0)}$ в первом приближении, выполняется следующим образом. Определив уменьшение $y^{[1]}$ вспомогательного построения из условия, чтобы длины $|\Delta \xi_{2.3}^{(0)} : y^{[1]}|$, $|\Delta \eta_{2.3}^{(0)} : y^{[1]}|$, не выходили из пределов 60—80 мм, на восковке от некоторой ее точки $1_2^{[1]}$ откладываем отрезок

$$\Delta \xi_{2.3}^{[1]} = \frac{1}{y^{[1]}} \cdot \Delta \xi_{2.3}^{(0)} = 1_2^{[1]} c_1^{[1]}$$

в соответствии с правилом:

$$\begin{aligned} &\text{вверх от точки } 1_2^{[1]}, \text{ если } \Delta \xi_{2.3}^{[1]} > 0, \\ &\text{вниз от точки } 1_2^{[1]}, \text{ если } \Delta \xi_{2.3}^{[1]} < 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Далее от концевой точки $c_1^{[1]}$ отрезка $1_2^{[1]} c_1^{[1]}$ под прямым углом к нему откладывается отрезок

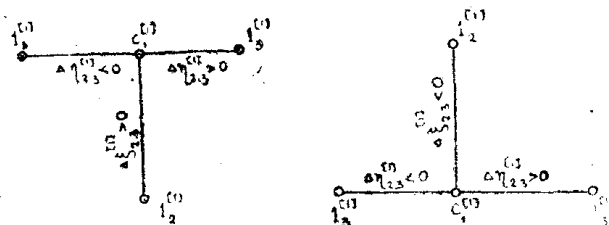
$$\Delta \eta_{2.3}^{[1]} = \frac{1}{y^{[1]}} \cdot \Delta \eta_{2.3}^{(0)} = c_1^{[1]} 1_3^{[1]}$$

в соответствии с правилом:

$$\begin{aligned} &\text{вправо от точки } c_1^{[1]}, \text{ если } \Delta \eta_{2.3}^{[1]} > 0 \\ &\text{влево от точки } c_1^{[1]}, \text{ если } \Delta \eta_{2.3}^{[1]} < 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Изложенный здесь способ построения поясняется на фиг. 2.3.

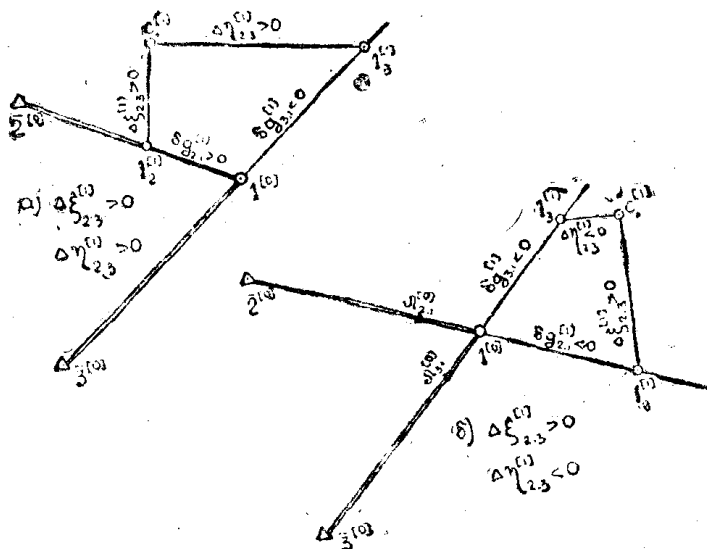
Нанеся на восковку по указанным правилам двойку отрезков $1_2^{[1]} c_1^{[1]}$ и $c_1^{[1]} 1_3^{[1]}$, мы затем накладываем эту восковку на рабочий чертеж так, чтобы



Фиг. 2.3

отрезок $1_2^{[1]} c_1^{[1]}$ был параллелен оси X , а отрезок $c_1^{[1]} 1_3^{[1]}$ параллелен оси Y . Далее поступательным перемещением восковки по чертежу добиваемся

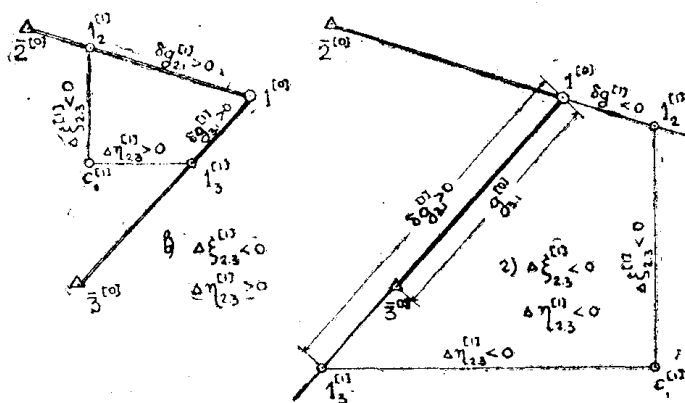
того, чтобы одновременно точка $1_2^{[1]}$ совместилась с лучом $\lambda_{1,2}^{[0]} = \uparrow 2^{[0]} 1^{[0]}$, а точка $1_3^{[1]}$ — с лучом $\lambda_{1,3}^{[0]} = \uparrow 3^{[0]} 1^{[0]}$ (фиг. 2.4 и 2.5). Измерив теперь длины $\delta d_{n,1}^{[1]}$ отрезков $1_1^{[1]} 1^{[0]}$ ($n \geq 2, 3$), установим их знак на основании



Фиг. 2.4

следующего правила. Если лучи $\lambda_{n,1}^{[0]} = \uparrow n^{[0]} 1^{[0]}$ и $\lambda_{n,1}^{[1]} = \uparrow 1_n^{[1]} 1^{[0]}$:

- 1) одинаково направлены, то $\delta d_{n,1}^{[1]} > 0$,
 - 2) противоположно направлены, то $\delta d_{n,1}^{[1]} < 0$
- (2.11)



Фиг. 2.5

Тогда значения $\delta d_{n,1}^{[1]}$ в первом приближении искомых поправок $\Delta d_{n,1}^{(0)}$ найдутся по формуле:

$$\delta d_{n,1}^{(1)} = y^{[1]} \cdot \delta d_{n,1}^{[1]} \quad (2.12)$$

Наконец значения $D_{n,1}^{(1)}$ в том же приближении длин $D_{n,1}$ примычных сторон $\bar{P} 1$ вычислим по формуле:

$$D_{n,1}^{(1)} = D_{n,1}^{(0)} + \delta d_{n,1}^{(1)} \quad (2.13)$$

1) Знак \uparrow означает, что берется направленный отрезок

Найденные описанным выше способом приближенные значения $D_{п.1}^{(1)}$ длин $D_{п.1}$ вследствие ошибок построения и измерения отрезков $1^{[0]}1^{[1]}_{п.1}$ будут ошибочны на величины $\Delta D_{п.1}^{(1)}$, где:

$$\nabla D_{п.1}^{(1)} = \delta D_{п.1}^{(1)} - \Delta D_{п.1}^{(0)} = y^{[1]} \delta \partial_{п.1}^{[1]} - y^{[0]} \Delta \partial_{п.1}^{[0]} = y^{[1]} (\delta \partial_{п.1}^{[1]} - K^{[1]} \Delta \partial_{п.1}^{[0]}) \quad (2.14)$$

Можно считать, что возможные значения разностей $|\delta \partial_{п.1}^{[1]} - K^{[1]} \Delta \partial_{п.1}^{[0]}|$ вряд ли превзойдут 2 мм. Отсюда следует, что

$$|\nabla D_{п.1}^{(1)}|_{\text{наиб}} = |\delta D_{п.1}^{(1)} - \Delta D_{п.1}^{(0)}|_{\text{наиб}} \leq 2y^{[1]} \text{ мм} \quad (2.15)$$

Но из (2.4) после замены поправок ошибками находим:

$$|\nabla D_{п.1}^{(0)}|_{\text{наиб}} = y^{[0]} \cdot |\nabla \partial_{п.1}^{[0]}|_{\text{наиб}} = 2y^{[0]} \text{ мм} = |\nabla D_{п.1}^{(0)}|_{\text{наиб}} \quad (2.16)$$

Отношение величин $|\nabla D_{п.1}^{(0)}|_{\text{наиб}}$ и $|\nabla D_{п.1}^{(1)}|_{\text{наиб}}$ характеризует степень уменьшения $M^{(1)}$ остаточных ошибок в длинах примычных сторон в результате выполнения первого приближения. Формулы (2.15) и (2.16) показывают, что уменьшение $M^{(1)}$

$$M^{(1)} = \frac{|\nabla D_{п.1}^{(0)}|_{\text{наиб}}}{|\nabla D_{п.1}^{(1)}|_{\text{наиб}}} = \frac{y^{[0]}}{y^{[1]}} = K^{[1]} = 50 \quad (2.17)$$

равно увеличению $K^{[1]}$ вспомогательного построения в первом приближении.

Вычислением значений $D_{п.1}^{(1)}$ примычных сторон первое приближение заканчивается. Однако, если намерены ограничиться вообще одним первым приближением, то дальше вычисляют по каждому из примычных лучей $L_{п.1}$ значения $x_{п.1}^{(1)}$, $y_{п.1}^{(1)}$ в первом приближении координат x_1 , y_1 точки 1. Координаты $x_{п.1}^{(1)}$, $y_{п.1}^{(1)}$ вычисляют по формулам:

$$\begin{aligned} x_{п.1}^{(1)} &= \bar{x}_п + D_{п.1}^{(1)} \cos t_{п.1} = \bar{x}_п + \xi_{п.1}^{(1)} \\ y_{п.1}^{(1)} &= \bar{y}_п + D_{п.1}^{(1)} \sin t_{п.1} = \bar{y}_п + \eta_{п.1}^{(1)} \end{aligned} \quad (п \in 2,3) \quad (2.18)$$

и в качестве окончательных берут координаты $x_1^{(1)}$, $y_1^{(1)}$, определяемые формулами:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{2} \left(x_{2.1}^{(1)} + x_{3.1}^{(1)} \right) \\ y_1^{(1)} &= \frac{1}{2} \left(y_{2.1}^{(1)} + y_{3.1}^{(1)} \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

§ 3. Второе и последующие приближения

Второе и последующие e -ые приближения производятся в основном в той же последовательности и теми же способами, что и первое приближение. Только здесь в качестве исходных берутся величины, полученные в предшествующих приближениях. Отсюда вытекает следующий общий

порядок смешанного решения прямой засечки на e -ой ступени приближения.

Обозначив через $D_{n.1}^{(e-1)}$ длину стороны $\overline{P_1}^{(e-1)}$, полученную из $(e-1)$ -го приближения, а через $\Delta D_{n.1}^{(e-1)}$ — искомую поправку величины $D_{n.1}^{(e-1)}$, мы будем иметь для $(e-1)$ -го приближения следующее исходное равенство, подобное равенству (2.4) в первом приближении:

$$D_{n.1} - D_{n.1}^{(e-1)} = \Delta D_{n.1}^{(e-1)} \quad (3.1)$$

Но в соответствии с (2.17) мы можем написать:

$$D_{n.1}^{(e-1)} = D_{n.1}^{(e-2)} + \delta D_{n.1}^{(e-1)}, \quad (3.2)$$

где $\delta D_{n.1}^{(e-1)}$ — поправка длины $D_{n.1}^{(e-2)}$, найденная из $(e-1)$ -го приближения. Поэтому (3.1) можно привести к виду:

$$D_{n.1} - D_{n.1}^{(e-2)} - \delta D_{n.1}^{(e-1)} = \Delta D_{n.1}^{(e-1)} \quad (n \in 2, 3) \quad (3.1.1)$$

или более развернуто:

$$D_{2.1} - D_{2.1}^{(e-2)} - \delta D_{2.1}^{(e-1)} = \Delta D_{2.1}^{(e-1)}$$

$$D_{3.1} - D_{3.1}^{(e-2)} - \delta D_{3.1}^{(e-1)} = \Delta D_{3.1}^{(e-1)} \quad (3.1.2)$$

Важно заметить, что искомая поправка $\Delta D_{n.1}^{(e-1)}$; значение которой еще нужно найти из e -го приближения, на одну ступень малости будет выше поправки $\delta D_{n.1}^{(e-1)}$, уже найденной из $(e-1)$ -го приближения.

Умножим теперь первое равенство (3.1.2) на $\cos t_{2.1}$, а второе равенство (3.1.2) — на $\cos t_{1.3}$ и полученные выражения сложим. Затем умножим первое из равенств (3.1.2) на $\sin t_{2.1}$, а второе — на $\sin t_{1.3}$ и полученные выражения сложим. Тогда, вводя прежние обозначения (2.6.1), а также обозначения, близкие к (2.6.2) и (2.6.3):

$$\begin{aligned} D_{2.1}^{(e-2)} \cos t_{2.1} + D_{3.1}^{(e-2)} \cos t_{1.3} &= \xi_{2.1}^{(e-2)} + \xi_{1.3}^{(e-2)} = \xi_{2.3}^{(e-2)} \\ D_{2.1}^{(e-2)} \sin t_{2.1} + D_{3.1}^{(e-2)} \sin t_{1.3} &= \eta_{2.1}^{(e-2)} + \eta_{1.3}^{(e-2)} = \eta_{2.3}^{(e-2)} \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

$$\begin{aligned} \delta D_{2.1}^{(e-1)} \cos t_{2.1} + \delta D_{3.1}^{(e-1)} \cos t_{1.3} &= \delta \xi_{2.1}^{(e-1)} + \delta \xi_{1.3}^{(e-1)} = \delta \xi_{2.3}^{(e-1)} \\ \delta D_{2.1}^{(e-1)} \sin t_{2.1} + \delta D_{3.1}^{(e-1)} \sin t_{1.3} &= \delta \eta_{2.1}^{(e-1)} + \delta \eta_{1.3}^{(e-1)} = \delta \eta_{2.3}^{(e-1)} \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

$$\begin{aligned} \Delta D_{2.1}^{(e-1)} \cos t_{2.1} + \Delta D_{3.1}^{(e-1)} \cos t_{1.3} &= \Delta \xi_{2.1}^{(e-1)} + \Delta \xi_{1.3}^{(e-1)} = \Delta \xi_{2.3}^{(e-1)} \\ \Delta D_{2.1}^{(e-1)} \sin t_{2.1} + \Delta D_{3.1}^{(e-1)} \sin t_{1.3} &= \Delta \eta_{2.1}^{(e-1)} + \Delta \eta_{1.3}^{(e-1)} = \Delta \eta_{2.3}^{(e-1)} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

получим:

$$\begin{aligned} (\bar{x}_3 - \bar{x}_2) - \xi_{2.3}^{(e-2)} - \delta \xi_{2.3}^{(e-1)} &= \Delta \xi_{2.3}^{(e-1)} \\ (\bar{x}_3 - \bar{x}_2) - \eta_{2.3}^{(e-2)} - \delta \eta_{2.3}^{(e-1)} &= \Delta \eta_{2.3}^{(e-1)} \end{aligned}$$

Но в соответствии с (2.7):

$$\begin{aligned}(\bar{x}_3 - \bar{x}_2) - \xi_{2.3}^{(e-2)} &= \Delta \xi_{2.3}^{(e-2)} \\ (\bar{y}_3 - \bar{y}_2) - \eta_{2.3}^{(e-2)} &= \Delta \eta_{2.3}^{(e-2)}.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Поэтому предыдущие равенства могут быть записаны в следующем окончательном виде:

$$\begin{aligned}\Delta \xi_{2.3}^{(e-2)} - \partial \xi_{2.3}^{(e-1)} &= \Delta \xi_{2.3}^{(e-1)} \\ \Delta \eta_{2.3}^{(e-2)} - \partial \eta_{2.3}^{(e-1)} &= \Delta \eta_{2.3}^{(e-1)}.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Вычислив суммарные поправки $\Delta \xi_{2.3}^{(e-1)}$, $\Delta \eta_{2.3}^{(e-1)}$, переходим к построению с их помощью отрезков $1^{[0]} 1_{\Pi}^{[e]}$, направленные длины которых обозначим через $\partial \partial_{\Pi.1}^{[e]}$. С этой целью на восковке так, как это описано выше в отношении отрезков $1_2^{[1]} c_1^{[1]}$, $c_1^{[1]} 1_3^{[1]}$, строим отрезки $1_2^{[e]} c_1^{[e]}$ и $c_1^{[e]} 1_3^{[e]}$, направленные длины которых $\Delta \xi_{2.3}^{[e-1]}$ и $\Delta \eta_{2.3}^{[e-1]}$ найдем так:

$$\Delta \xi_{2.3}^{[e-1]} = \frac{1}{y^{[e]}} \cdot \Delta \xi_{2.3}^{(e-1)} \quad (3.5)$$

$$\Delta \eta_{2.3}^{[e-1]} = \frac{1}{y^{[e]}} \cdot \Delta \eta_{2.3}^{(e-1)}$$

При этом уменьшение $y^{[e]}$ выбирается таким образом, чтобы длины отрезков $1_2^{[e]} c_1^{[e]}$, $c_1^{[e]} 1_3^{[e]}$ не превышали 70—80 мм. Затем передвижением восковки по чертежу добиваемся одновременного совмещения точек $1_2^{[e]}$, $1_3^{[e]}$ восковки с лучами $\lambda_{2.1}^{[0]}$, $\lambda_{3.1}^{[0]}$ рабочего чертежа при условии параллельности отрезков $1_2^{[e]} c_1^{[e]}$, $c_1^{[e]} 1_3^{[e]}$ соответствующим осям координат. Тогда длины направленных отрезков $1^{[0]} 1_{\Pi}^{[e]}$ по величине и знаку будут равны искомым поправкам $\partial \partial_{\Pi.1}^{[e]}$ длин $\partial_{\Pi.1}^{[e-1]}$ примычных сторон. Знак поправки $\partial \partial_{\Pi.1}^{[e]}$ найдется по правилу (2.11).

Отыскав поправки $\partial \partial_{\Pi.1}^{[e]}$ длин $\partial_{\Pi.1}^{[e-1]}$ примычных сторон на чертеже с уменьшением $y^{[e]}$, соответствующие им поправки $\partial D_{\Pi.1}^{(e)}$ на основной плоскости найдем по формуле (ср. 2.12):

$$\partial D_{\Pi.1}^{(e)} = y^{[e]} \cdot \partial \partial_{\Pi.1}^{[e]} \quad (3.6)$$

Наконец значения $D_{\Pi.1}^{(e)}$ длин примычных сторон в e -ом приближении найдем по формуле:

$$D_{\Pi.1}^{(e)} = D_{\Pi.1}^{(e-1)} + \partial D_{\Pi.1}^{(e)} \quad (3.7)$$

На этом e -ое приближение заканчивается.

Сходимость e -го приближения, определяемая величиной увеличения $K^{[e]}$:

$$K^{[e]} = \frac{y^{[e-1]}}{y^{[e]}} \quad (3.8)$$

при переходе от $(e-1)$ -го приближения к e -му приближению, будет того же порядка, что и для первого приближения. Это вытекает из рассмотрения следующей прямой формулы для подсчета увеличения $K^{[e]}$:

$$K^{[e]} = \frac{\left| \delta \partial_{п.1}^{[e]} \right|_{\text{наиб}}}{\left| \nabla \partial_{п.1}^{[e]} \right|_{\text{наиб}}} \quad (3.8.1)$$

Здесь: $\left| \delta \partial_{п.1}^{[e]} \right|_{\text{наиб}}$ — наибольшее значение увеличенной при e -ом приближении в $K^{[e]}$ раз длины ошибки $\nabla \partial_{п.1}^{[e]}$, которую мы допустили в $(e-1)$ -ом приближении при построении отрезка $l^{[0]} l_{п}^{[e-1]}$ и измерении его длины $\delta \partial_{п.1}^{[e-1]}$ на рабочем чертеже. Если ставить требование, чтобы $\left| \delta \partial_{п.1}^{[e]} \right|_{\text{наиб}}$ не превышало 100 мм, и учесть, что $\left| \nabla \partial_{п.1}^{[e]} \right|_{\text{наиб}}$ вряд ли превзойдет 2 мм, то отсюда из (3.8.1) следует:

$$K^{[e]} = \frac{100 \text{ мм}}{2 \text{ мм}} = 50 = K^{[1]}.$$

Итак, мы получили для e -го приближения то же значение увеличения что и для первого приближения.

Признаком конца решения прямой засечки смешанным способом будет равенство нулю (в пределах точности вычислений) остатков $\Delta \xi_{2.3}^{(n-1)}$, $\Delta \eta_{2.3}^{(n-1)}$ в некотором n -ом приближении.

Тогда окончательные значения длин $D_{п.1}$ и приращений координат $\xi_{п.1}$, $\eta_{п.1}$ по примычным сторонам $\Pi 1$ найдутся по формулам:

$$\begin{aligned} D_{п.1} &= D_{п.1}^{(0)} + \sum_{e=1}^{n-1} \delta D_{п.1}^{(e)} \\ \xi_{п.1} &= \xi_{п.1}^{(0)} + \sum_{e=1}^{n-1} \delta \xi_{п.1}^{(e)} \\ \eta_{п.1} &= \eta_{п.1}^{(0)} + \sum_{e=1}^{n-1} \delta \eta_{п.1}^{(e)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Полученные значения $D_{п.1}$, $\xi_{п.1}$, $\eta_{п.1}$ проверим по формулам:

$$\begin{aligned} \xi_{п.1} &= D_{п.1} \cos t_{п.1} \\ \eta_{п.1} &= D_{п.1} \sin t_{п.1} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Наконец, окончательные координаты x_1, y_1 определяемой точки 1 вычислим дважды следующим образом:

$$x_1 = \bar{x}_2 + \xi_{2.3} = \bar{x}_3 + \xi_{3.1} \quad (3.11)$$

$$y_1 = \bar{y}_2 + \eta_{2.1} = \bar{y}_3 + \eta_{3.1}.$$

На этом решение прямой засечки смешанным способом заканчивается. Обычно решение засечки при длинах сторон до 10 км требует 2 приближений.

Соберем воедино формулы решения прямой засечки смешанным способом.

Сводка формул

$$\left. \begin{array}{l} 1) \ t_{2.1} = \bar{t}_{2.4} + \gamma_2 \\ 2) \ t_{1.3} = \bar{t}_{5.3} + \gamma_3 \end{array} \right\} \quad \text{— общий случай (фиг. 1.1)}$$

или

$$\left. \begin{array}{l} 1) \ t_{2.1} = \bar{t}_{2.3} + \gamma_2 \\ 2) \ t_{1.3} = \bar{t}_{2.3} + \gamma_3 \end{array} \right\} \quad \text{— частный случай (фиг. 1.2)}$$

Первое приближение

$$3) \ \xi_{2.1}^{(0)} = D_{2.1}^{(0)} \cos t_{2.1}$$

$$\xi_{1.3}^{(0)} = D_{3.1}^{(0)} \cos t_{1.3}$$

$$4) \ \eta_{2.1}^{(0)} = D_{2.1}^{(0)} \sin t_{2.1}$$

$$\eta_{1.3}^{(0)} = D_{3.1}^{(0)} \sin t_{1.3}$$

$$5) \ \xi_{2.3}^{(0)} = \xi_{2.1}^{(0)} + \xi_{1.3}^{(0)}$$

$$\eta_{2.3}^{(0)} = \eta_{2.1}^{(0)} + \eta_{1.3}^{(0)}$$

$$6) \ \Delta \xi_{2.3}^{(0)} = (\bar{x}_3 - \bar{x}_2) - \xi_{2.3}^{(0)}$$

$$\Delta \eta_{2.3}^{(0)} = (\bar{y}_3 - \bar{y}_2) - \eta_{2.3}^{(0)}$$

e-ое приближение

$$7) \ \delta \xi_{2.1}^{(e-1)} = \delta D_{2.1}^{(e-1)} \cos t_{2.1}$$

$$\delta \xi_{3.1}^{(e-1)} = \delta D_{3.1}^{(e-1)} \cos t_{1.3}$$

$$8) \ \delta \eta_{2.1}^{(e-1)} = \delta D_{2.1}^{(e-1)} \sin t_{2.1}$$

$$\delta \eta_{1.3}^{(e-1)} = \delta D_{3.1}^{(e-1)} \sin t_{1.3}$$

$$9) \ \delta \xi_{2.3}^{(e-1)} = \delta \xi_{2.1}^{(e-1)} + \delta \xi_{1.3}^{(e-1)}$$

$$\delta \eta_{2.3}^{(e-1)} = \delta \eta_{2.1}^{(e-1)} + \delta \eta_{1.3}^{(e-1)}$$

$$10) \ \Delta \xi_{2.3}^{(e-1)} = \Delta \xi_{2.3}^{(e-2)} - \delta \xi_{2.3}^{(e-1)}$$

$$\Delta \eta_{2.3}^{(e-1)} = \Delta \eta_{2.3}^{(e-2)} - \delta \eta_{2.3}^{(e-1)}$$

Окончание вычислений

$$11) \ D_{n.1} = D_{n.1}^{(0)} + \sum_{e=1}^{n-1} \delta D_{n.1}^{(e)}$$

$$13) \ x_1 = \bar{x}_2 + \xi_{2.1} = \bar{x}_3 + \xi_{3.1}$$

$$12) \ \xi_{n.1} = \xi_{n.1}^{(0)} + \sum_{e=1}^{n-1} \delta \xi_{n.1}^{(e)} = D_{n.1} \cos t_{n.1}$$

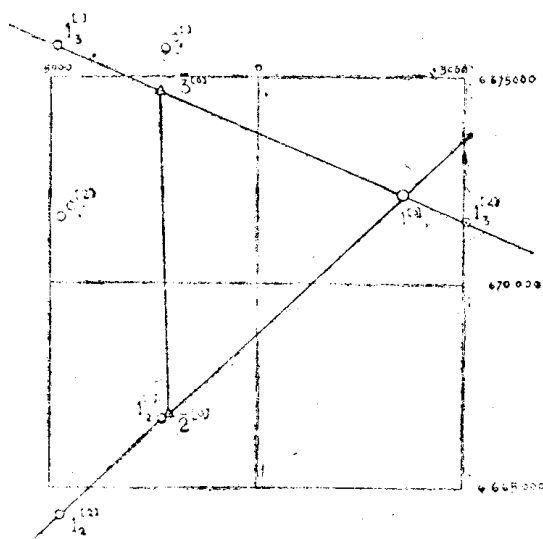
$$y_1 = \bar{y}_2 + \eta_{2.1} = \bar{y}_3 + \eta_{3.1}$$

$$\eta_{n.1} = \eta_{n.1}^{(0)} + \sum_{e=1}^{n-1} \delta \eta_{n.1}^{(e)} = D_{n.1} \sin t_{n.1}$$

§ 4. Пример решения прямой засечки смешанным способом

Деловые указания. Заключение

Даем пример на решение прямой засечки смешанным способом для случая, изображенного на фиг. 1.2 (табл. 1). Рабочий чертеж (фиг. 4.1) был составлен на миллиметровке с уменьшением $y^{[0]} = 100\,000$. Измерения по чертежу в основном и вспомогательных построениях произво-



Уменьшение $y^{[0]} = 100\,000$

„ $y^{[1]} = 1000$

„ $y^{[2]} = 10$

Фиг. 4.1 (уменьш. в 2 раза)

Таблица 1

\bar{x}_2	6 666741.56	-2083.29	\bar{y}_2	$\partial \xi_{2.1}^{(1)}$	+51.71	+34.48	$\partial \xi_{1.3}^{(1)}$
\bar{x}_3	6 674653.74	-2373.16	\bar{y}_3	$\partial \eta_{2.1}^{(1)}$	+57.68	-83.89	$\partial \eta_{1.3}^{(1)}$
$\bar{x}_3 - \bar{x}_2$	+7912.18	-289.87	$\bar{y}_3 - \bar{y}_2$	$\Delta \xi_{2.3}^{(1)}$	+0.71	+0.97	$\Delta \eta_{2.3}^{(1)}$
$\bar{t}_{2.3}$	357°54'06"6	357°54'05"6	$\bar{t}_{2.3}$	$\partial D_{2.1}^{(2)}$	+1.13 ¹⁾	-0.16 ¹⁾	$\partial D_{3.1}^{(2)}$
$+ \gamma_2$	48 36 32.4	294 26 23.1	$+ \gamma_3$	$\partial \xi_{2.1}^{(2)}$	+0.78	-0.06	$\partial \xi_{3.1}^{(2)}$
$t_{2.1}$	46 30 39.0	292 20 29.7	$t_{1.3}$	$\partial \eta_{2.1}^{(2)}$	+0.82	+0.15	$\partial \eta_{1.3}^{(2)}$
$\text{cost}_{2.1}$	+0.688218	+0.380128	$\text{cost}_{1.3}$	$\Delta \xi_{2.3}^{(2)}$	-0.01	0.00	$\Delta \eta_{2.3}^{(2)}$
$D_{2.1}^{(0)}$	7820.00 ¹⁾	6420.00 ¹⁾	$D_{3.1}^{(0)}$	$D_{2.1}$	7900.63	6510.54	$D_{3.1}$
$\text{sint}_{2.1}$	+0.725505	-0.924935	$\text{sint}_{1.3}$	$\xi_{2.1}$	+5437.35	+2474.84	$\xi_{1.3}$
$\xi_{2.1}^{(0)}$	+5381.86	+2440.42	$\xi_{1.3}^{(0)}$	$\eta_{2.1}$	+5731.95	-6021.83	$\eta_{1.3}$
$\eta_{2.1}^{(0)}$	+5673.45	-5938.08	$\eta_{1.3}^{(0)}$	x_1	6 672178.91	+3648.66	y_1
$\Delta \xi_{2.3}^{(0)}$	+89.90	-25.24	$\Delta \eta_{2.3}^{(0)}$		90	67	
$\partial D_{2.1}^{(1)}$	+79.50 ¹⁾	+90.70 ¹⁾	$\partial D_{3.1}^{(0)}$				

1) Взято с рабочего чертежа прямой засечки

1-е приближение

$$\text{дл. } (1_2^{(1)} C_1^{(1)}) = \Delta \xi_{2.3}^{(0)} = +89,90$$

$$\text{дл. } (C_1^{(1)} 1_3^{(1)}) = \Delta \eta_{2.3}^{(0)} = -25,24$$

$$K^{[1]} = 100; \quad Y^{[1]} = 1000$$

$$Y^{[1]} \cdot \text{дл. } (1_2^{[1]} 1^{[0]}) = Y^{[1]} \cdot \partial \partial_{2.1}^{[1]} = \\ = \partial D_{2.1}^{(1)} = +79,50$$

$$Y^{[1]} \cdot \text{дл. } (1_3^{[1]} 1^{[0]}) = Y^{[1]} \cdot \partial \partial_{3.1}^{[1]} = \\ = \partial D_{3.1}^{(1)} = +90,70$$

2-е приближение

$$\text{дл. } (1_2^{(2)} C_1^{(2)}) = \Delta \xi_{2.3}^{(1)} = +0,71$$

$$\text{дл. } (C_1^{(2)} 1_3^{(2)}) = \Delta \eta_{2.3}^{(1)} = +0,97$$

$$K^{[2]} = 100; \quad Y^{[2]} = 10$$

$$Y^{[2]} \cdot \text{дл. } (1_2^{[2]} 1^{[0]}) = Y^{[2]} \cdot \partial \partial_{2.1}^{[2]} = \\ = \partial D_{2.1}^{(2)} = +1,13$$

$$Y^{[2]} \cdot \text{дл. } (1_3^{[2]} 1^{[0]}) = Y^{[2]} \cdot \partial \partial_{3.1}^{[2]} = \\ = \partial D_{3.1}^{(2)} = -0,16$$

3-е приближение

$$\text{дл. } (1_2^{(3)} C_1^{(3)}) = \Delta \xi_{2.3}^{(2)} = -0,01$$

$$\text{дл. } (C_1^{(3)} 1_3^{(3)}) = \Delta \eta_{2.3}^{(2)} = 0,00$$

дились с точностью до 1 мм. Задача решена 2 приближениями. В 3 приближении были вычислены только значения величин $\Delta \xi_{2.3}^{(2)}$, $\Delta \eta_{2.3}^{(2)}$, близость которых к нулю служила показателем конца решения засечки. Последовательные построения на рабочем чертеже, выполнявшиеся в ходе решения засечки, показаны на фиг. 4.1. Необходимые основные и вспомогательные вычисления расположены в виде табл. 1. Наконец значения измеренных по рабочему чертежу отрезков $\partial \partial_{п.1}^{[e]}$ и значения сумм $\Delta \xi_{2.3}^{(e-1)}$, $\Delta \eta_{2.3}^{(e-1)}$, а также их геометрический смысл и значения уменьшений $Y^{[e]}$ помещены под табл. 1.

В заключение укажем, что решение прямой засечки можно считать законченным, когда в некотором e -ом приближении дойдем до таких значений $\Delta \xi_{п.1}^{(n-1)}$, $\Delta \eta_{п.1}^{(n-1)}$, которые оказываются того же порядка малости, что и требуемая точность окончательных координат x_1 , y_1 точки 1. Таким образом, если бы точность этих координат в 1 м была достаточно, то можно было бы ограничиться одним первым приближением.

Это, например, будет иметь место при обработке сетей угломерного (тригонометрического) нивелирования, где можно удовлетвориться точностью длин сторон в 1 м. Для вычисления же предварительных значений координат точек в треугольнике (триангуляции) при уравнивании ее способом косвенных наблюдений придется делать два приближения.

В заключение укажем, что опытное сравнение различных способов полного решения прямой засечки, т. е. с вычислением сторон и координат, показало сокращение объема работ до 30% для смешанного способа по сравнению с общепринятыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Ф. Н. Руководство по высшей геодезии, часть I, вып. 2, § 108, 1939.
2. Бутлер С. А. Уравнивание заполняющих тригонометрических сетей, стр. 63—64, 1936.